# Лекция 1
# ПОРЯДОК И ТИП ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Функция комплексного переменного $f(z)$ называется ***целой***, если она аналитична на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначение: $f(z) \in A(\mathbb{C})$.

По теореме Тейлора такая функция разлагается в ряд:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad |z| < \infty.$$

Радиус сходимости $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \infty \quad \left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0\right)$.

Введем обозначение: $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Для коэффициентов $a_k$ в разложении функции $f(z)$ в ряд Тейлора справедливо неравенство Коши:

$$|a_k| \le \frac{M(r)}{r^k}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad r > 0.$$

Из теоремы Лиувилля следует, что если $M(r) < Ar^q$, $r > 0$, $A$ не зависит от $r$, то функция $f(z)$ — многочлен степени $n \le [q]$ (целая часть $q$), при этом если $q = 0$, то $f(z) = \text{const}$. Тем самым, если целая функция не многочлен, то $M(r)$ растет быстрее любой степени $r$, $r \to \infty$.

---

**Определение.** Функция $f(z)$ — ***целая функция конечного порядка***, если

$$\exists \mu: \ M(r) < \exp(r^{\mu}), \qquad \forall r \ge R_0.$$

Назовем ***порядком*** $\rho$ ***функции*** $f(z)$ точную нижнюю грань $\mu$:

$$\rho = \inf \mu.$$

---

Из определения порядка следует, что $\forall \varepsilon > 0$

$$M(r) < \exp(r^{\rho+\varepsilon}), \qquad \forall r \ge R(\varepsilon),$$

$$\exists \{r_k\},\ r_k \to \infty: \qquad M(r_k) > \exp(r_k^{\rho-\varepsilon}).$$

Таким образом,

$$\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} < \rho + \varepsilon; \qquad \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r} > \rho - \varepsilon, \quad r = r_k.$$

Итак, порядок функции

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}.$$

Если ни при каком $\mu$ неравенство $M(r) < \exp(r^{\mu})$ не выполняется, то говорят, что функция $f(z)$ имеет *бесконечный порядок* ($\rho = \infty$).

Например, функция $f(z) = e^z$ имеет порядок $\rho = 1$, а функция $f(z) = \exp(e^z)$ — порядок $\rho = \infty$.

---

**Определение.** Пусть функция $f(z)$ имеет порядок $\rho$, $0 < \rho < \infty$. Функция $f(z)$ имеет ***конечный тип*** при порядке $\rho$, если

$$\exists a > 0\colon M(r) < \exp(ar^{\rho}), \qquad r > r_0.$$

Точная нижняя грань $a$ называется ***типом*** $\sigma$ ***функции*** $f(z)$:

$$\inf a = \sigma.$$

---

Из определения типа следует, что $\forall \varepsilon > 0$:

$$M(r) < \exp[(\sigma + \varepsilon)r^{\rho}], \qquad r > r_0(\varepsilon);$$

$$M(r) > \exp[(\sigma - \varepsilon)r^{\rho}], \qquad r = r_k \to \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{\ln M(r)}{r^{\rho}} < \sigma + \varepsilon; \qquad \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}} > \sigma - \varepsilon, \qquad r = r_k \to \infty.$$

Итак, тип функции

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r^{\rho}}.$$

Если ни при каком $a$ не выполняется неравенство $M(r) < \exp(ar^{\rho})$, то говорят, что функция $f(z)$ имеет при порядке $\rho$ *бесконечный тип*: $\sigma = \infty$. Если $\sigma = 0$, то говорят, что функция $f(z)$ имеет *минимальный тип*, а если $0 < \sigma < \infty$, — *нормальный тип*.

### Примеры

**1.** Функция $f(z)$ — многочлен, т.е.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \qquad a_n \neq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Многочлен имеет порядок $\rho = 0$.

**2.** Функция $f(z) = e^{P(z)}$, где $P(z)$ — многочлен, $P(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$.

Покажем, что порядок $\rho = n$, тип $\sigma = |a_n|$. В частности, для функции $f(z) = e^z$ порядок $\rho = 1$, тип $\sigma = 1$.

Так как $|f(z)| = e^{\mathrm{Re}P(z)}$, то для $\forall\varepsilon > 0$ и $r \geq R(\varepsilon)$ справедливы оценки:

$$\mathrm{Re}P(z) \leq |P(z)| \leq r^n[|a_n| + \ldots + |a_0|] < r^n(|a_n| + \varepsilon).$$

Тем самым

$$|f(z)| < \exp[r^n(|a_n| + \varepsilon)].$$

С другой стороны, пусть $\arg(a_n) = \alpha$ и $z = |z|e^{-i\frac{\alpha}{n}}$, тогда

$$\mathrm{Re}P(z) = |a_n|r^n + \mathrm{Re}[a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0] > r^n(|a_n| - \varepsilon), \qquad \forall r \geq R_1(\varepsilon),$$

или

$$|f(z)| > \exp[r^n(|a_n| - \varepsilon)], \qquad \arg z = -\frac{\alpha}{n}.$$

Итак, $\rho = n$, $\sigma = |a_n|$.

3. Пусть функция $f(z)$ имеет порядок $\rho$, $0 \leq \rho \leq \infty$ и $P(z)$ — многочлен, тогда функция $f_1(z) = f(z)P(z)$ имеет тот же порядок $\rho$.

Пусть функция $f(z)$ имеет порядок $\rho$, $0 < \rho < +\infty$ и тип $\sigma$, $0 \leq \sigma \leq \infty$, тогда функция $f_1(z) = f(z)P(z)$ имеет тот же порядок $\rho$ и тип $\sigma$.

Рассмотрим теперь связь между ростом $M(r)$ целой функции $f(z)$ и скоростью убывания ее тейлоровских коэффициентов.

**Лемма 1.1.** Пусть $M(r) < \exp(ar^{\mu})$, $r > r_0$. Тогда

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\frac{a\mu e}{n}\right)^{1/\mu}, \quad n > n_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из неравенства Коши для тейлоровских коэффициентов будем иметь

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} < \frac{e^{ar^{\mu}}}{r^n} = \varphi(r), \quad r > r_0.$$

Найдем минимум функции $\varphi(r)$, для этого рассмотрим $\ln\varphi(r) = ar^{\mu} - n\ln r$. Производная $\ln\varphi(r)$ есть $\frac{\varphi'(r)}{\varphi(r)} = \mu ar^{\mu-1} - \frac{n}{r}$. Минимум функции $\varphi(r)$ в точке $r_1$: $\varphi'(r_1) = 0$, т.е. $r_1 = \left(\frac{n}{a\mu}\right)^{1/\mu}$ при $n \geq n_0$, $r_1 > r_0$. Поэтому

$$|a_n| < \varphi(r_1) = \frac{e^{n/\mu}}{\left(\frac{n}{a\mu}\right)^{n/\mu}} = \left(\frac{a\mu e}{n}\right)^{n/\mu}, \quad n > n_0.$$

Справедлива также следующая лемма.

**Лемма 1.2.** Пусть $\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\frac{a\mu e}{n}\right)^{1/\mu}$, $n \ge n_0$, тогда

$$M(r) < \exp[(a+\varepsilon)r^{\mu}], \qquad r > r_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Из условия леммы 1.2 следует, что функция $f(z)$ — целая и

$$|a_n|r^n < \left[\left(\frac{a\mu e}{n}\right)^{1/\mu} r\right]^n, \quad n \ge n_0.$$

Пусть $N = N(r)$ — наименьшее целое, удовлетворяющее условию

$$\left(\frac{a\mu e}{N}\right)^{1/\mu} r < \frac{1}{2}.$$

Найдем оценку для $N(r)$:

$$N > a\mu e(2r)^{\mu}; \qquad a\mu e(2r)^{\mu} < N(r) \le a\mu e(2r)^{\mu} + 1.$$

При $r > r_1$ данное $N(r) > n_0$, поэтому при $r > r_1$ и $n \ge N(r)$

$$|a_n|r^n < \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|r^n < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

Пусть $m(r)$ — наибольший из членов $|a_0|, |a_1 r|, \ldots, |a_n r^n|, \ldots$, т.е. так называемый максимальный член ряда. Имеем

$$M(r) \le \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n = \sum_{n=0}^{N-1}|a_n|r^n + \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|r^n \le N(r)m(r) + 1, \qquad r > r_1.$$

Пусть $m(r) = |a_s|r^s$ при некотором $s$. Если только функция $f(z)$ не многочлен (а в этом случае лемма 1.2 очевидна), то при $r \to +\infty$ следует, что $s \to +\infty$. Пусть $s > n_0$ при $r > r_2$, тогда при $r > r_2$

$$m(r) = |a_s|r^s < \left[\left(\frac{a\mu e}{s}\right)^{1/\mu} r\right]^s \le \max_{n\in\mathbb{N}}\left[\left(\frac{a\mu e}{n}\right)^{1/\mu} r\right]^n \le \max_{t\ge 1}\varphi(t),$$

где функция $\varphi(t) = \left[\left(\frac{a\mu e}{t}\right)^{1/\mu} r\right]^t$. При $t \to \infty$ функция $\varphi(t) \to 0$, $\varphi(1) = (a\mu e)^{1/\mu}r$. Найдем точки, где $\varphi'(t) = 0$. Рассмотрим $\ln\varphi(t) = t\ln[(a\mu e)^{1/\mu}r] - \frac{t}{\mu}\ln t$. Производная

$$(\ln\varphi(t))' = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \ln[(a\mu e)^{1/\mu}r] - \frac{\ln t}{\mu} - \frac{1}{\mu}.$$

Тогда $\varphi'(t) = 0$ в точке $t_0 = a\mu r^{\mu}$ и $\varphi(t_0) = e^{ar^{\mu}}$, т.е. $\max\limits_{t\geq 1}\varphi(t) = e^{ar^{\mu}}$, поэтому

$$m(r) \leq e^{ar^{\mu}}, \quad r > r_3 = \max(r_1, r_2).$$

Имеем

$$M(r) < [a\mu e(2r)^{\mu} + 1]e^{ar^{\mu}} + 1 < \exp[(a+\varepsilon)r^{\mu}], \quad \varepsilon > 0, \ r > r_0(\varepsilon).$$

Лемма доказана. ■

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОРЯДКА И ТИПА ФУНКЦИИ ЧЕРЕЗ КОЭФФИЦИЕНТЫ

**Теорема 1.1.** Пусть $f(z)$ — целая и $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z| < \infty$. Тогда порядок

$$\rho = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\left|\frac{1}{a_n}\right|}. \tag{1.1}$$

Если порядок $\rho$, $0 < \rho < +\infty$, то тип $\sigma$ вычисляется по формуле

$$(\sigma e\rho)^{1/\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ имеет порядок $\rho < \infty$. Из определения порядка следует, что

$$M(r) < \exp(r^{\rho+\varepsilon}), \qquad r > r_0(\varepsilon).$$

Из леммы 1.1 следует неравенство

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\frac{(\rho+\varepsilon)e}{n}\right)^{\frac{1}{\rho+\varepsilon}}, \quad n > n_0,$$

поэтому

$$\ln\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{n\ln n}{\rho+\varepsilon} - cn, \quad c = \frac{1}{\rho+\varepsilon}\ln(\rho+\varepsilon)e, \ \ n > n_0,$$

или

$$\ln\left|\frac{1}{a_n}\right| > \frac{n\ln n}{\rho+2\varepsilon}, \ \ \frac{n\ln n}{\ln\left|\frac{1}{a_n}\right|} < \rho + 2\varepsilon, \quad n > n_1.$$

Тем самым

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln\left|\dfrac{1}{a_n}\right|} \le \rho.$$

Пусть теперь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n\ln n}{\ln\left|\dfrac{1}{a_n}\right|} = q.$$

Если $\varepsilon > 0$, то при $n > n_0$ имеем $\dfrac{n\ln n}{\ln\left|\dfrac{1}{a_n}\right|} < q + \varepsilon$ или $\sqrt[n]{|a_n|} < \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{q+\varepsilon}}$.

В силу леммы 1.2 справедливо неравенство

$$M(r) < e^{(a+\varepsilon)r^{\mu}}, \quad \mu = q + \varepsilon, \ \ a = \frac{1}{e(q+\varepsilon)}.$$

Следовательно, $\rho \le q$. Окончательно получаем $\rho = q$.

Пусть теперь $\rho = \infty$, покажем, что и $q = \infty$. Если бы $q < \infty$, то по доказанному выше $\rho \le q$, но это невозможно. Таким образом, для любого $\rho$, $0 \le \rho \le \infty$ формула (1.1) доказана.

Рассмотрим случай, когда функция $f(z)$ имеет конечный порядок $\rho$ и конечный тип $\sigma$ ($0 < \rho < \infty$, $\sigma < \infty$).

Из определения порядка и типа функции вытекает неравенство

$$M(r) < \exp[(\sigma + \varepsilon)r^{\rho}], \quad r \ge r_0(\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

По лемме 1.1 имеем оценку

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \left[\frac{(\sigma+\varepsilon)e\rho}{n}\right]^{1/\rho}, \ \ n \ge n_0.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|} \le (\sigma e\rho)^{1/\rho}.$$

Обозначим $\tau = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n^{1/\rho} \sqrt[n]{|a_n|}$, тогда

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\tau+\varepsilon}{n^{1/\rho}} = \left(\frac{a\mu e}{n}\right)^{1/\mu}, \quad \mu = \rho, \ \ a = \frac{(\tau+\varepsilon)^{\rho}}{\rho e}, \ \ \varepsilon > 0, \ \ n > n_0.$$

В силу леммы 1.2 имеем оценку на $M(r)$:

$$M(r) < \exp[(a+\varepsilon)r^{\rho}], \quad r > r_0(\varepsilon),$$

поэтому

$$\sigma \le a = \frac{(\tau+\varepsilon)^\rho}{\rho e} \quad \text{или} \quad \sigma \le \frac{\tau^\rho}{\rho e}, \quad \tau \ge (\sigma e\rho)^{1/\rho}.$$

Окончательно $\tau = (\sigma e\rho)^{1/\rho}$.

При $\sigma = \infty$ формула также верна, так как, если при $\sigma = \infty$, $\tau < \infty$, то из полученной выше оценки пришли бы к противоречию, т.е. если $\sigma = \infty$, то и $\tau = \infty$. ■

Убедимся, что, каково бы ни было $\rho$, $0 \le \rho \le \infty$, существуют целые функции $f(z)$, порядок которых равен $\rho$.

### Примеры

**1.** $0 < \rho < \infty, \quad a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{n/\rho} \quad \left(\sigma = \frac{1}{e\rho}\right).$

**2.** $\rho = 0, \quad a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{n/\varepsilon_n}, \quad \varepsilon_n > 0, \quad \varepsilon_n \to 0.$

**3.** $\rho = +\infty, \quad a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{\sqrt{\ln n}}}, \quad n > 1.$

Покажем, что для любого $\rho$, $0 < \rho < \infty$ и любого $\sigma$, $0 \le \sigma \le \infty$ существуют функции, имеющие порядок $\rho$ и тип $\sigma$.

### Примеры

**1.** $0 < \sigma < \infty, \quad a_n = \left(\frac{\sigma e\rho}{n}\right)^{n/\rho}.$

**2.** $\sigma = 0, \quad a_n = \left(\frac{1}{n\ln n}\right)^{n/\rho}.$

**3.** $\sigma = \infty, \quad a_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n/\rho}.$

**Задача.** Показать, что $f(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}$ есть целая функция порядка $\rho = 1$, тип $\sigma = \infty$.

## ПОРЯДОК И ТИП ПРОИЗВОДНОЙ

**Теорема 1.2.** Пусть функция $f(z)$ — целая и имеет порядок $\rho$, $0<\rho<\infty$ и тип $\sigma$. Тогда ее производная имеет тот же порядок $\rho$ и тот же тип $\sigma$.

Доказательство. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z|<\infty$, тогда

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n,$$

где $b_n = a_{n+1}(n+1)$.

Порядок $\rho_1$ производной $f'(z)$ по доказанной теореме 1.1

$$\rho_1 = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{n\ln n}{\ln\left|\dfrac{1}{b_n}\right|} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\sqrt[n]{\dfrac{1}{|b_n|}}} =$$

$$= \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\sqrt[n]{\dfrac{1}{(n+1)|a_n+1|}}} = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\sqrt[n]{\dfrac{1}{|a_n|}}} = \rho.$$

Пусть производная $f'(z)$ имеет при порядке $\rho$ тип $\sigma_1$, тогда по теореме 1.1 справедлива формула

$$(\sigma_1 e\rho)^{1/\rho} = \varlimsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}\sqrt[n]{|b_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} n^{1/\rho}\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = (\sigma e\rho)^{1/\rho}.$$

Тем самым $\sigma_1=\sigma$. ■

### Задачи

**I.** Определить порядок целых функций:

1) $f(z)=\operatorname{ch} z$; 2) $f(z)=\operatorname{sh} z$; 3) $f(z)=e^{\sin z}$; 4) $f(z)=e^{\cos z}$;

5) $f(z)=e^z\sin z$; 6) $f(z)=e^z\cos z$; 7) $f(z)=e^{e^z}$.

**II.** Определить тип целых функций:

1) $f(z)=\operatorname{ch} z$; 2) $f(z)=\operatorname{sh} z$; 3) $f(z)=e^z\sin z$; 4) $f(z)=e^z\cos z$.

**III.** Пусть $P(z)$ — многочлен и $f(z)$ — целая функция порядка $\rho$. Доказать, что функция $f(z)P(z)$:

1) целая функция порядка $\rho$, $0\le\rho\le\infty$;

2) имеет тип $\sigma$ при порядке $\rho$, если $0<\rho<\infty$ и функция $f(z)$ имеет тип $\sigma$, $0\le\sigma\le\infty$.

**IV.** Доказать, что функция $F(z)$ есть целая функция, и найти ее порядок:

1) $F(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n^k} e^{inz}, \quad k > 1, \ |q| < 1;$

2) $F(z) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n^{\sigma}}\right).$

**V.** Пусть функция $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ имеет порядок $\rho$. Определить порядок функции $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^{\rho} z^n.$

**VI.** Определить порядок и тип функции $F(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$, где $\Gamma(z)$ — функция Эйлера, $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ .